第 42 卷 第 4 期
2024 年 12 月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol. 42, No. 4
Dec., 2024

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2024.04.08

空间碎片激光测距中轨道偏差的非线性传播

张利军[1,2]，舒 鹏[1]，李荣旺[1,3]，李语强[1,3]

(1. 中国科学院 云南天文台，昆明 650216； 2. 中国科学院大学，北京 100049； 3. 中国科学院 空间目标与碎片观测重点实验室，南京 210034)

摘要： 在对空间碎片进行激光测距时，往往会因为轨道预报偏差较大而导致测距成功率低，为此，结合无迹变换方法与高斯混合模型，对空间碎片轨道偏差进行传播，得到空间碎片在终端的分布情况（即概率密度函数），从而为激光测距提供可靠的依据。首先选取了空间碎片激光测距中的典型轨道，并设定初始轨道偏差，通过无迹变换方法非线性地预报偏差的均值和协方差矩阵，高斯混合模型逼近偏差的概率密度函数，并将结果转换到以测站为中心的站心球坐标系中，所得结果与蒙特卡洛方法得到的结果一致：预报距离的绝对误差在 20 m 以内，方位角、俯仰角的误差不超过 2″，预报的概率密度函数曲线能较好地符合蒙特卡洛仿真结果，且计算效率提升百倍以上。这表明该方法可以快速地提供高精度的偏差预报，为后续激光测距提供可靠的依据。

关 键 词： 激光测距；偏差演化；轨道预报；无迹变换；高斯混合模型

中图分类号： P123.3 **文献标识码：** A

1 引 言

随着空间碎片数量的急剧增加，空间碎片环境也日益恶劣，在轨航天器的安全运行受到巨大威胁，因此需要对这些空间碎片进行高精度监测、精密定位和编目，以保障航天活动的安全[1]。相对于雷达与光学观测，激光测量可以得到较高精度的距离信息[2]，卫星激光测距技术的测距精度已接近毫米级[3]，且此技术经常作为一种独立的手段来检验卫星的轨道精度[4, 5]。自 Greene 等人[6]首次报告了 Stromlo 激光测距站开展的空间碎片激光测距研究以来，国内外已有多个激光测距台站实现了空间碎片的漫反射激光测距，成功取得空间碎片的

收稿日期： 2024-01-23； **修回日期：** 2024-03-06

资助项目： 国家重点研发计划 (2022YFC2203800)；国家自然科学基金 (12303082, 12293034)；云南省“兴滇英才支持计划”青年人才专项；国家资助博士后研究人员计划 (GZC20232975)

通讯作者： 舒鹏，shupeng@ynao.ac.cn

回波数据[7−10]。利用这些空间碎片的高精度激光测距数据，无论是作为独立观测量还是与其他观测量进行联合定轨，都能够显著地提高其轨道精度[11−13]。

然而空间碎片测距数据的获取依旧是一大难题。相比合作目标激光测距，空间碎片激光测距的漫反射回波信号弱（信噪比低），并且轨道预报精度较低，导致测距成功率低[1, 3]。空间碎片的轨道主要由双行根数 (two-line element set, TLE) 结合轨道预报模型 SDP4/SGP4 外推得到[14]，存在较大偏差。在激光测距实践中，距离偏差过大会导致接收系统中单光子探测器开门时间内探测不到回波光子，视位置偏差过大则会导致发射激光不能覆盖目标；因此，轨道偏差对空间碎片激光测距的成功率影响很大。本文对空间碎片激光测距中的轨道偏差进行研究，得到距离和视位置偏差信息，进而为激光测距目标搜索提供支撑。

在研究中，初始偏差通常遵从高斯分布[15]，其概率密度函数可由其前两阶矩（即均值和协方差）完全确定，且高斯分布经线性或线性化的动力学系统传播后仍然为高斯分布。但是高斯分布偏差通过非线性系统后会变为非高斯分布[16]。常用的偏差传播分析方法有蒙特卡洛 (Monte Carlo, MC) 打靶仿真、协方差分析方法、混沌多项式展开法、无迹变换方法 (unscented transformation, UT)、状态转移张量法、微分代数方法和高斯混合模型 (Gaussian mixture model, GMM) 等方法[17]。其中最直接的方法是进行蒙特卡洛打靶仿真，并且该方法适用于任意分布的偏差和任意的动力系统；不足之处是要得到准确可信的结果需进行大量的随机采样，计算量大，耗时长。

本文结合 UT 与 GMM 方法，使用 GMM 逼近偏差的概率密度函数，通过 UT 方法对子高斯的均值和协方差矩阵进行预报，得到初始高斯分布轨道偏差在任意时刻的概率密度函数，进而为后续空间碎片激光测距的望远镜路径搜索提供依据。

2　基于无迹变换的轨道偏差预报

2.1　无迹变换方法

UT 方法是一种具有二阶精度的预报均值与协方差矩阵的方法[18]。假设初始偏差遵从高斯分布，给定航天器初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 分布的均值 $\boldsymbol{m}_0$ 及协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_0$，采用 UT 方法进行偏差传播分析，如图 1 所示，包括以下几步。

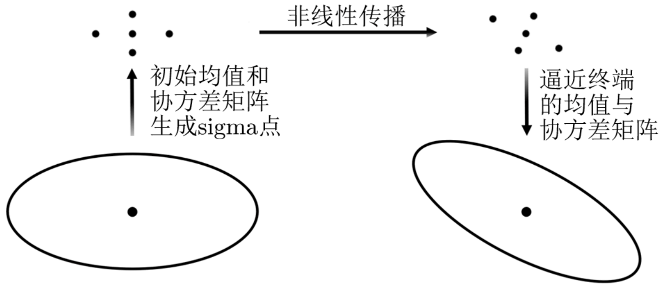


图 1　无迹变换示意图

(1) 根据给定的初始均值 $\boldsymbol{m}_0$ 及协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_0$ 产生 $(2n+1)$ 个确定的带权重的 sigma 样本点：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_0^0 = \boldsymbol{m}_0 \\ \boldsymbol{\xi}_0^k = \boldsymbol{m}_0 + \sqrt{n+\lambda}\boldsymbol{S}_{\xi,k} \\ \boldsymbol{\xi}_0^{k+n} = \boldsymbol{m}_0 - \sqrt{n+\lambda}\boldsymbol{S}_{\xi,k} \end{cases} , \tag{1}$$

其中，$k = 1, 2, \cdots, n$；$\boldsymbol{S}_\xi$ 为协方差矩阵的平方根，即 $\boldsymbol{P}_\xi = \boldsymbol{S}_\xi \boldsymbol{S}_\xi^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{S}_{\xi,k}$ 为 $\boldsymbol{S}_\xi$ 的第 k 列。每个样本点对应权重为：

$$\begin{cases} \omega_0^m = \dfrac{\lambda}{n+\lambda} \\ \omega_0^P = \omega_0^m + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ \omega_k^P = \omega_k^m = \dfrac{1}{2(n+\lambda)} \end{cases} , \tag{2}$$

其中，$\lambda = \alpha^2(n+\kappa) - n$，$n$ 为输入偏差的维数，$\alpha \in (0, 1]$，κ 为自由参数，一般设 $\alpha = 0.5$，$\kappa = 0$；对于高斯分布，$\beta = 2$；$k = 1, 2, \cdots, 2n$。

(2) 将所有由式 (1)得到的 sigma 点用给定的非线性函数 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$ 预报到终端，获得终端的 sigma 样本点 $\boldsymbol{\xi}^k(t) = \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{\xi}_0^k, t_0)$。

(3) 用终端 sigma 样本点逼近终端偏差的均值与协方差矩阵：

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \omega_k^m \boldsymbol{\xi}^k(t) \\ \boldsymbol{P}(t) = \sum_{k=0}^{2n} \omega_k^P \left[\boldsymbol{\xi}^k(t) - \boldsymbol{m}(t)\right] \left[\boldsymbol{\xi}^k(t) - \boldsymbol{m}(t)\right]^{\mathrm{T}} \end{cases} . \tag{3}$$

相比较于 MC 方法的大量随机采样，UT 方法仅需要 $(2n+1)$ 个确定的 sigma 点，就能预报偏差的均值及协方差矩阵，计算量相对较小。通过对 sigma 点采用特定条件构造，UT 方法可以得到偏差的高阶矩信息[19, 20]，但是无法直接得到非高斯分布的准确概率密度函数，并且对不同的初始条件 $(\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{P}_0)$，也需要重新采样与计算。

2.2 sigma 点轨道预报

空间目标轨道预报，其本质是求解轨道状态量 $\boldsymbol{x}(t)$ 所满足的常微分初值问题[21]，见式 (4)，其解为 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t; \boldsymbol{x}_0, t_0)$。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), t] \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} , \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), t]$ 包含了空间目标在轨期间所受到的各种摄动力。求解式 (4) 可采用解析法、数值法或半解析法。而要实现轨道的高精度预报，必须使用能够兼顾各种复杂摄动力的高精度数值法。对 sigma 点进行轨道预报时，本文采用高精度数值法求解空间目标的常微分方程，得到终端的轨道状态（即终端 sigma 点）。

2.3 sigma 点坐标转换

2.2 节中得到的终端 sigma 点在地心坐标系下，为了应用到激光测距中，我们将其转换到站心地平坐标系，该坐标系的原点位于测站中心，右手坐标系的三个轴如下：X 轴和 Y 轴位于参考椭球的切平面上，X 轴向东为正，Y 轴向北为正，Z 轴与参考椭球法向重合，

向上为正。再将站心地平坐标系从笛卡尔坐标转换到球坐标 $(R,\ E,\ A,\ \dot{R},\ \dot{E},\ \dot{A})$ 下，其中 R 为距离，E 为俯仰角，A 为方位角。

3 基于高斯混合模型的轨道偏差表征

GMM 是一种使用有限个高斯分布函数 $p_g(\boldsymbol{x};\boldsymbol{m},\boldsymbol{P})$ 的加权和去逼近任意分布概率密度函数 $p(\boldsymbol{x},t)$ 的方法，即

$$p(\boldsymbol{x},t)=\sum_{i=1}^{N}\omega_i p_g\left(\boldsymbol{x};\boldsymbol{m}_i,\boldsymbol{P}_i\right) \quad , \tag{5}$$

其中，N 为使用的子高斯分布的数量，$\boldsymbol{m}_i$ 和 $\boldsymbol{P}_i$ 分别为第 i 个子高斯分布的均值和协方差矩阵，ω_i 为第 i 个子高斯分布的权重系数，且满足如下约束：

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i=1,\quad \omega_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,N \quad . \tag{6}$$

基于 GMM 的偏差分析方法首先要将初始偏差分割为多个子高斯分布的加权和，然后将每个子高斯分布利用其他偏差传播方法预报到终端，最后将所有终端子高斯分布进行合并，获得终端偏差的分布，其过程如图 2 所示。

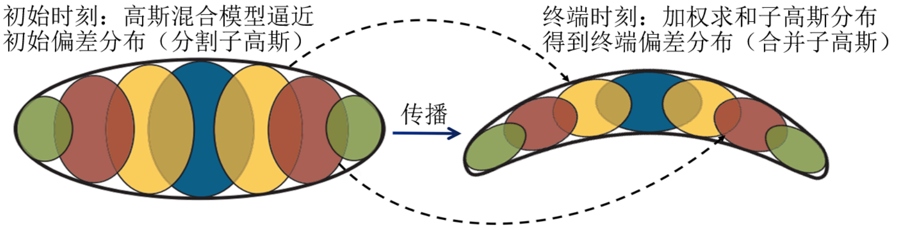


图 2 基于 GMM 的轨道偏差传播示意图

3.1 一维标准正态分布分割

在进行多维高斯分割之前，需要获得一维标准正态分布的分割参数（即 N 个子高斯分布的标准差 $\widetilde{\sigma}$、均值 $\widetilde{m}_i$ 及权重 $\widetilde{\omega}_i$），进而将其拓展到给定均值及协方差矩阵的多维高斯分布。

L_2 为衡量两函数间逼近程度的测度[16]，通过最小化 L_2 距离，利用式 (8)、(9) 分割优化模型，得出一维分割参数。令 $p_1(x)=p_g(x;0,1)$，$p_2(x)=\sum_{i=1}^{N}p_g(x;m_i,\sigma_i^2)$，取 $\sigma_i=\widetilde{\sigma}$，即采用等标准差分割（否则会出现部分子高斯标准差极小的情况），则 L_2 距离可简化为：

$$\begin{aligned}L_2\left(p_1,p_1\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\widetilde{\omega}_i\widetilde{\omega}_j}{2\sqrt{\pi\widetilde{\sigma}^2}}\exp\left[-\frac{\left(\widetilde{m}_i-\widetilde{m}_j\right)^2}{4\widetilde{\sigma}^2}\right]-\\ 2\textstyle\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\widetilde{\omega}_i}{\sqrt{2\pi\left(\widetilde{\sigma}^2+1\right)}}\exp\left[\dfrac{-\widetilde{m}_i^2}{2\left(\widetilde{\sigma}^2+1\right)}\right] \quad .\end{aligned} \tag{7}$$

当 $N \geqslant 3$ 且为奇数时，优化模型为：

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{X}} J = L_2\left(p_1, p_1\right) + \eta\widetilde{\sigma}\text{；其中}, \\ \boldsymbol{X} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_N\right]^{\mathrm{T}} ,\ K = 0.5(N-1) ,\ i = 2, 3, \cdots, K , \\ \boldsymbol{X}(1:K) \in [0,1] ,\ \boldsymbol{X}(K+1:N-1) \in [-6,6] ,\ \boldsymbol{X}(N) \in [0,1] , \\ \text{s.t.} \begin{cases} \widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_{-1} = \dfrac{1}{2}x_1 ,\ \widetilde{\omega}_i = \widetilde{\omega}_{-i} = x_i\left(\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{\omega}_j\right) , \\ \widetilde{\omega}_0 = 1 - 2\sum_{j=1}^{K}\widetilde{\omega}_j , \\ \widetilde{m}_1 = -\widetilde{m}_{-1} = x_{K+1} ,\ \widetilde{m}_i = -\widetilde{m}_{-i} = x_{K+i} , \\ \widetilde{m}_0 = 0 ,\ \widetilde{\sigma} = x_N . \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

当 $N \geqslant 2$ 且为偶数时，优化模型为：

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{X}} J = L_2\left(p_1, p_1\right) + \eta\widetilde{\sigma}\text{；其中}, \\ \boldsymbol{X} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_N\right]^{\mathrm{T}} ,\ K = 0.5N-1 ,\ i = 2, 3, \cdots, K , \\ \boldsymbol{X}(1:K) \in [0,1] ,\ \boldsymbol{X}(K+1:N-1) \in [-6,6] ,\ \boldsymbol{X}(N) \in [0,1] , \\ \text{s.t.} \begin{cases} \widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_{-1} = \dfrac{1}{2}x_1 ,\ \widetilde{\omega}_i = \widetilde{\omega}_{-i} = x_i\left(\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{\omega}_j\right) , \\ \widetilde{\omega}_{K+1} = \widetilde{\omega}_{-K-1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - 2\displaystyle\sum_{j=1}^{K}\widetilde{\omega}_j\right) , \\ \widetilde{m}_1 = -\widetilde{m}_{-1} = x_{K+1} ,\ \widetilde{m}_i = -\widetilde{m}_{-i} = x_{K+i} , \\ \widetilde{m}_{K+1} = -\widetilde{m}_{-K-1} = x_{2K+1} ,\ \widetilde{\sigma} = x_N . \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

其中，η 为标准差的权重系数，本文取为 0.001。

上述优化模型为非线性无约束最优化问题，本文使用拟牛顿法 (BFGS) 优化算法进行优化求解，初值设置为：$\boldsymbol{X}(1:K) = 1/K$，$\boldsymbol{X}(N) = 0.5$，$\boldsymbol{X}(K+1:N-1) = (L-u+1)/(L+1)$，$L = \mathrm{floor}(0.5N)$，$u = 1, 2, \cdots, K$。

图 3 展示的是利用上述模型将一维标准正态分布概率密度函数分割为子高斯数 $N = 6$ 所得曲线的对比结果，可知上述优化模型所得分割参数能较好地逼近原概率密度函数。图 4 展示最优化后 L_2 值与子高斯数 N 之间的关系，表明子高斯数量越多，逼近效果越好，正常情况下 $N > 20$ 就足够所需精度。

3.2 多维分割方向选取

在得到一维分割参数之后，需要通过选择特定的分割方向 $\boldsymbol{a}$，将其应用到多维情况。对于给定的动力系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t), t]$，一般选取其非线性最强的方向作为分割方向，本文做为指标选用的系统非线性度[22]为：

$$L_{\mathrm{non}} = \frac{\|\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}} + h\widehat{\boldsymbol{a}}) + \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}} - h\widehat{\boldsymbol{a}}) - 2\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})\|_2}{2h^2} \quad , \tag{10}$$

其中，$\|\cdot\|_2$ 表示 2 范数，步长 h 一般取为 $\sqrt{3}$，$\widehat{\boldsymbol{a}}$ 表示为：

$$\widehat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{a}\right\|_2} \quad , \tag{11}$$

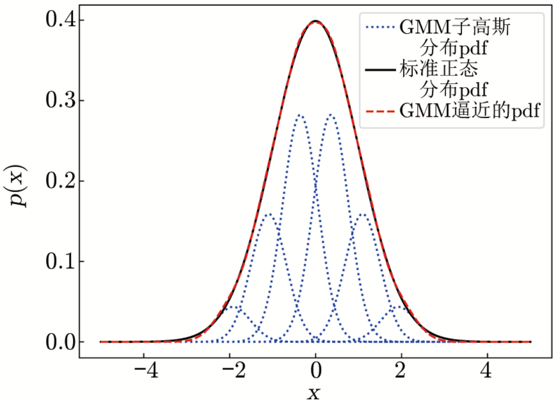


图 3　标准正态分割结果 ($N = 6$)

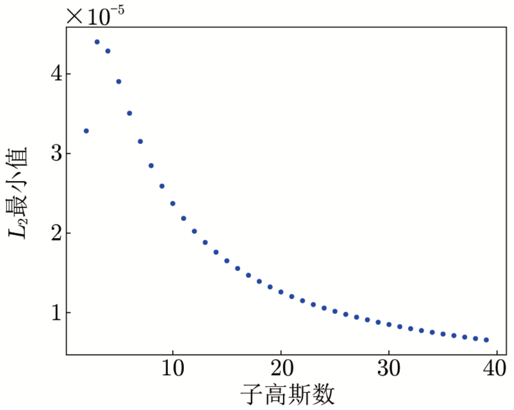


图 4　L_2 距离与子高斯数关系图

其中，$\boldsymbol{S}$ 为协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_0$ 的平方根矩阵，即 $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$。

3.3　多维分割与合并

获得分割方向 $\boldsymbol{a}$ 之后，将分割参数应用到该方向，通过特征值分解，便可获得多维情况每个子高斯分布的权重 ω_i、均值 $\boldsymbol{m}_i$ 及协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_i$：

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_i = \widetilde{\omega}_i,\ \ \widetilde{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{a}}{\left\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{a}\right\|_2} \\ \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{m}_0 + \widetilde{m}_i\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{S}\left[|bmI_n + (\widetilde{\sigma}^2 - 1)\,\widetilde{\boldsymbol{a}}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \end{array}\right. , \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{I}_n$ 为 n 维单位矩阵。

获得 N 个子高斯后，采用 UT 方法将每一个子高斯分布的均值 $\boldsymbol{m}_i$ 及协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_i$ 预报到终端时刻，进而通过式 (13) 计算出终端偏差的均值 $\boldsymbol{m}_f$、协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_f$ 以及概率密度函数 $\hat{p}(\boldsymbol{x}_f, t)$：

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{m}_f = \sum_{i=1}^{N}\dfrac{\omega_i}{\omega_f}\boldsymbol{m}_i\ ,\ \ \omega_f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N}\omega_i \\ \boldsymbol{P}_f = \sum_{i=1}^{N}\dfrac{\omega_i}{\omega_f}\left(\boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{m}_i\boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\right) - \boldsymbol{m}_f\boldsymbol{m}_f^{\mathrm{T}} \\ \hat{p}\left(\boldsymbol{x}_f, t\right) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i p_g\left(\boldsymbol{x}_f; \boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{P}_i\right) \end{array}\right. . \tag{13}$$

4　算例分析

考虑摄动影响，将偏差的终端预报结果在以测站为中心的球坐标系下表述，其中距离方向上的分布提供距离偏差信息，为距离门设置提供依据；方位角、俯仰角投影上的分布提供视位置偏差信息，为激光指向提供依据。计算过程如下：

(1) 预报未来几天的过境圈次，选择终端时刻；

(2) 采用 3.3 节所描述的方法，根据式 (12) 将初始时刻的偏差分布分割为多个子高斯分布；

(3) 将每个子高斯分布的均值及协方差矩阵用 2.1 节式 (1)－(3) 和 2.2 节的方法预报到终端，获得终端时刻子高斯分布的均值及协方差矩阵；

(4) 利用 2.3 节中的方法将终端子高斯分布的均值及协方差矩阵转换到站心球坐标系下；

(5) 最后采用 3.3 节式 (13)，合并子高斯分布获得终端时刻偏差的均值、协方差矩阵和概率密度函数。

针对空间碎片的激光测距，目标轨道高度一般为 300 ~ 1 500 km，本文选取轨道高度为 340 km 和 1 450 km 的典型轨道作为算例，通过与基于数值积分的 MC 仿真结果对比，验证 UT&GMM 方法的精度及计算效率。其中相对误差的计算公式为：

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{UT\&GMM 结果} - \text{MC 结果}}{\text{MC 结果}} \right| \quad , \tag{14}$$

其中，MC 样本数选取 10^6 个。

4.1 340 km 高度轨道算例

选取初始轨道的经典轨道根数为：$[a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \omega,\ f]$=[6 716.3 km, 0.000 6, 42.854 5°, 55.751 7°, 231.488°, 0°]，转换到笛卡尔坐标系为 $[x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}]$ = [830 494.562 073 m, −5 621 747.380 258 m, −3 572 227.131 809 m, 6 303.072 553 m/s, 3 005.551 611 m/s, −3 264.569 688 m/s]，初始时刻为 UTC 时间 2023 年 1 月 1 日 00:00:00，初始协方差矩阵为：

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 1\times10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\times10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\times10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{-2} \end{bmatrix} \quad , \tag{15}$$

其中，位置协方差的单位为 m^2，速度协方差的单位为 $(\mathrm{m/s})^2$。

图 5 为 340 km 轨道偏差传播到 63 031 s 后的结果。图 5a) 给出了距离方向上的概率密度曲线，蓝色实线表示的是 21 个子高斯的分布；红色点线表示 UT&GMM 方法得到的概率密度曲线（即合并 21 个子高斯分布后的结果），绿色直方图为 MC 方法得到的概率密度，图中表明 UT&GMM 方法得到的概率密度曲线与 MC 方法所得非常吻合；浅蓝色实线是由 UT&GMM 方法得到的终端均值与协方差所绘制的高斯分布，橙色实线是由 MC 方法得到的终端均值与协方差所绘制的高斯分布，可见两者非常接近，但这种高斯分布与 MC 方法得到的实际分布存在较大差异，表明其终端偏差分布的非高斯性。图 5b) 给出了所有 21 个子高斯分布终端误差椭球在方位角、俯仰角平面的投影，可以看到子高斯很好地表征出了 MC 仿真样本点的特征。图 5c) 给出了 UT&GMM 方法得到的终端概率密度函数

等高线在方位、俯仰角平面的投影，以及两种方法得到的协方差矩阵 3σ 椭圆。由图可知，UT&GMM 方法拟合的终端概率密度函数等高线与 MC 仿真样本点的弯曲分布吻合，表明 UT&GMM 方法能很好预报偏差的概率密度函数。

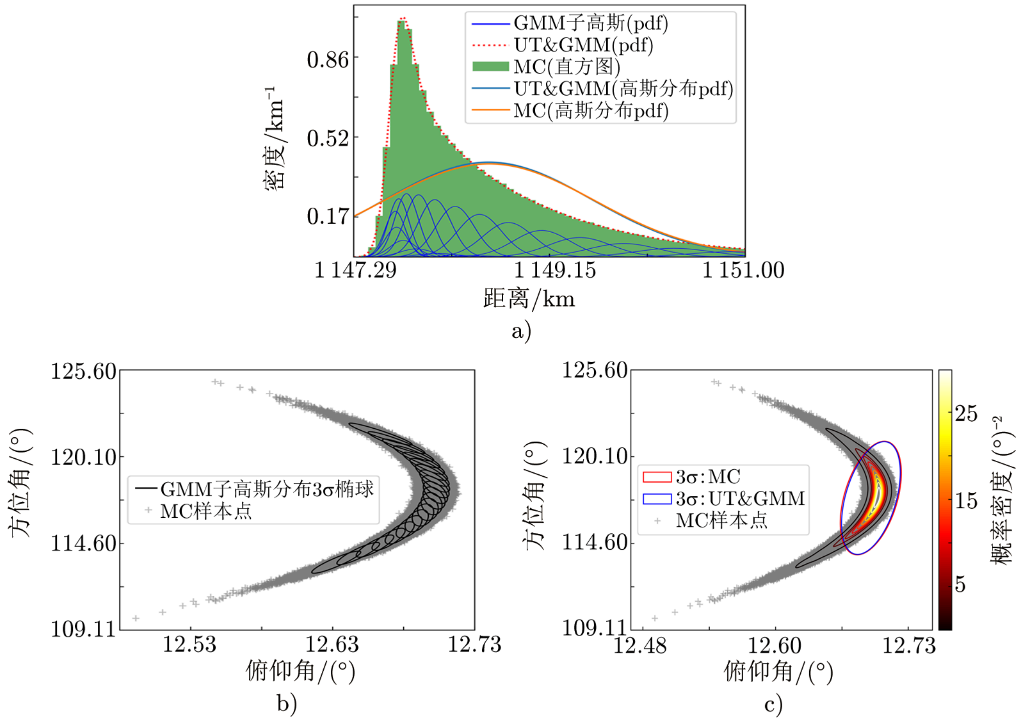


图 5　340 km 轨道偏差传播终端时刻 (63 031 s) 结果

表 1 和表 2 分别给出了 UT&GMM 方法得到的终端均值和标准差与 MC 方法所得结果的对比，其中第二行为 MC 仿真结果，其余各行依次是 UT&GMM 方法的结果、两者的绝对误差和相对误差。由表可知，UT&GMM 方法得到的终端均值与标准差和 MC 方法的结果基本相同，其相对误差在 5% 以内。均值的相对误差结果要好于标准差，这是由 UT 方法决定的，UT 方法预报的均值要比协方差的精度更高[18]。从表中我们还发现标准差 σ_E 的相对误差明显大于其他项，这是因为 σ_E 的值接近 0 所致；而其绝对偏差为 $(4.407\,7\times10^{-4)\circ}(1.59'')$，比方位角上的绝对偏差 $0.012\,728^\circ$ 要小得多，表明 UT&GMM 方法预报的结果非常接近 MC 的结果。

表 1　340 km 轨道偏差传播终端均值对比

	m_R/m	$m_E/(^\circ)$	$m_A/(^\circ)$	$m_{\dot{R}}/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	$m_{\dot{E}}/('')\cdot \mathrm{s^{-1}}$	$m_{\dot{A}}/('')\cdot \mathrm{s^{-1}}$
MC	$1.148\,6\times10^6$	12.693	117.48	2.549 2	1.374 7	$-1.351\,1\times10^3$
UT&GMM	$1.148\,6\times10^6$	12.693	117.47	2.633 6	1.368 5	$-1.351\,1\times10^3$
(UT&GMM)−MC	−6.275 6	$1.154\,2\times10^{-4}$	$-7.313\,3\times10^{-4}$	$8.441\,9\times10^{-2}$	$-6.168\,2\times10^{-3}$	$-1.532\,2\times10^{-2}$
相对误差/(%)	$5.463\,8\times10^{-4}$	$9.093\,5\times10^{-4}$	$6.225\,4\times10^{-4}$	3.311 6	0.448 71	$1.134\,0\times10^{-3}$

表 2 340 km 轨道偏差传播终端标准差对比

	σ_R/m	σ_E/(°)	σ_A/(°)	$\sigma_{\dot{R}}$/m·s^{-1}	$\sigma_{\dot{E}}$/(″)·s^{-1}	$\sigma_{\dot{A}}$/(″)·s^{-1}
MC	1.0004×10^{3}	1.1569×10^{-2}	1.4711	1.7091×10^{2}	12.571	1.6237
UT&GMM	9.7956×10^{2}	1.1128×10^{-2}	1.4584	1.6943×10^{2}	12.464	1.5657
(UT&GMM)−MC	−20.803	-4.4077×10^{-4}	-1.2728×10^{-2}	−1.4756	−0.10737	-5.8030×10^{-2}
相对误差/(%)	2.0795	3.8099	0.86519	0.86341	0.85406	3.5739

图 6 给出了 340 km 轨道选取不同子高斯数传播 63 031 s 后的概率密度函数等高线。由图可知，当子高斯数为 1 时（此时未划分子高斯仅 UT 变换），其概率密度分布为高斯分布，与实际情况的非高斯分布不符；在子高斯数量较小时 ($N = 5$)，所得到的分布能表征其非高斯特征，但是吻合度较差；随着子高斯数量的增加 ($N = 10$, $N = 15$)，UT&GMM 方法得到的概率密度曲线越来越吻合 MC 方法所得到的分布。

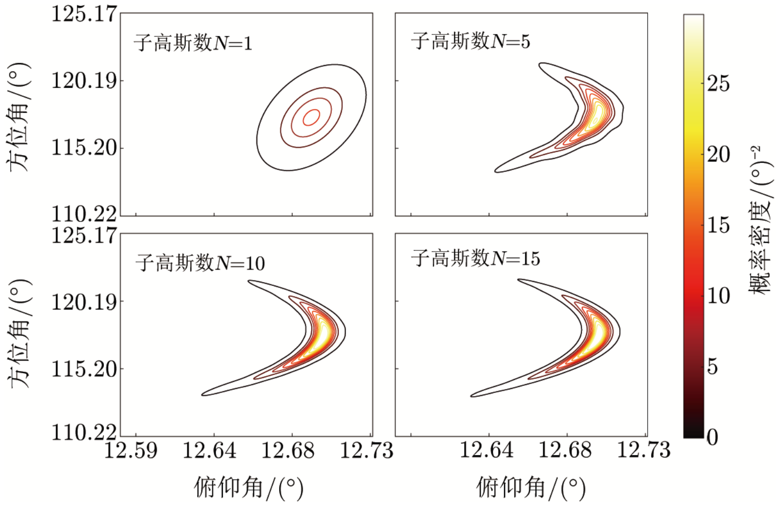
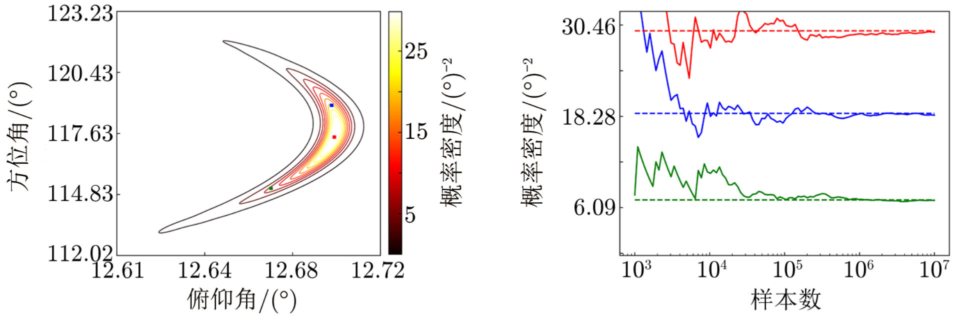


图 6 不同子高斯数下 340 km 轨道偏差传播终端分布对比

图 7 给出了 MC 方法不同采样数所得到的概率密度，图 a) 为子高斯数 $N = 21$ 时 UT&GMM 方法得到的终端概率密度函数等高线在方位角、俯仰角平面的投影，并用不同颜色的矩形标注了三个不同密度的区域；图 b) 显示了这三个矩形区域的概率密度，其中实线为 MC 方法不同采样数量得到的概率密度，虚线为 UT&GMM 方法得到的概率密度。当样本数量较少时，MC 方法的结果随样本数变化波动较大；当样本数量超过 10^6 时，MC 方法得到的概率密度趋于稳定，且与本文 UT&GMM 方法计算得到的概率密度趋于一致。

4.2 1 450 km 高度轨道算例

选取初始轨道的经典轨道根数为：$[a, e, i, \Omega, \omega, f]$=[7 826.3 km, 0.05, 69.5°, 90°, 250°, 30°]，转换到笛卡尔坐标系为 $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$=[2 556 447.120 420 m, 1 688 904.371 998 m, −6 837 528.416 363 m, −521.272 050 m/s, 7 297.360 806 m/s, 1 394.205 428 m/s]，初始时刻为



a)　　b)

图 7　340 km 轨道 UT&GMM 方法与 MC 方法不同采样数所得概率密度对比

UTC 时间 2023 年 1 月 1 日 00:00:00。由于轨道高度在 1 000 km 以上，受大气阻力影响较小，因此设置较小的初始协方差：

$$\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 5\times10^{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5\times10^{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times10^{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5\times10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\times10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\times10^{-3} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

其中，位置协方差的单位为 m^2，速度协方差的单位为 $(\mathrm{m/s})^2$。结果见表 3、表 4、图 8。

表 3　1 450 km 轨道偏差传播终端均值对比

	m_R/m	m_E/(°)	m_A/(°)	$m_{\dot{R}}/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	$m_{\dot{E}}/('')\cdot\mathrm{s^{-1}}$	$m_{\dot{A}}/('')\cdot\mathrm{s^{-1}}$
MC	$1.562\,0\times10^{6}$	67.176	$-1.578\,8\times10^{2}$	$-1.442\,0\times10^{2}$	-97.459	$2.345\,6\times10^{3}$
UT&GMM	$1.562\,0\times10^{6}$	67.176	$-1.578\,8\times10^{2}$	$-1.440\,3\times10^{2}$	-97.529	$2.345\,6\times10^{3}$
(UT&GMM)−MC	$-7.039\,2$	$4.124\,9\times10^{-4}$	$4.579\,9\times10^{-3}$	0.170 02	$-7.019\,7\times10^{-2}$	$8.543\,1\times10^{-2}$
相对误差/(%)	$4.506\,5\times10^{-4}$	$6.140\,4\times10^{-4}$	$2.900\,8\times10^{-3}$	0.117 90	$7.202\,7\times10^{-2}$	$3.642\,2\times10^{-3}$

表 4　1 450 km 轨道偏差传播终端标准差对比

	σ_R/m	σ_E/(°)	σ_A/(°)	$\sigma_{\dot{R}}/\mathrm{m\cdot s^{-1}}$	$\sigma_{\dot{E}}/('')\cdot\mathrm{s^{-1}}$	$\sigma_{\dot{A}}/('')\cdot\mathrm{s^{-1}}$
MC	$1.626\,6\times10^{3}$	$6.250\,1\times10^{-2}$	2.934 3	$1.120\,5\times10^{2}$	44.273	15.661
UT&GMM	$1.606\,9\times10^{3}$	$6.104\,0\times10^{-2}$	2.908 7	$1.110\,6\times10^{2}$	43.891	15.368
(UT&GMM)−MC	-19.678	$-1.461\,6\times10^{-3}$	$-2.562\,3\times10^{-2}$	$-0.991\,41$	$-0.381\,14$	$-0.293\,19$
相对误差/(%)	1.209 7	2.338 5	0.873 23	0.884 80	0.860 89	1.872 1

图 8 给出了 1 450 km 轨道偏差传播 101 076 s 后的结果，图 9 给出了不同子高斯数在终端的概率密度函数等高线。结果表明，在子高斯数量够大时，UT&GMM 方法得到的终端概率密度函数曲线能很好地符合由 MC 仿真样本点得到的非高斯分布。

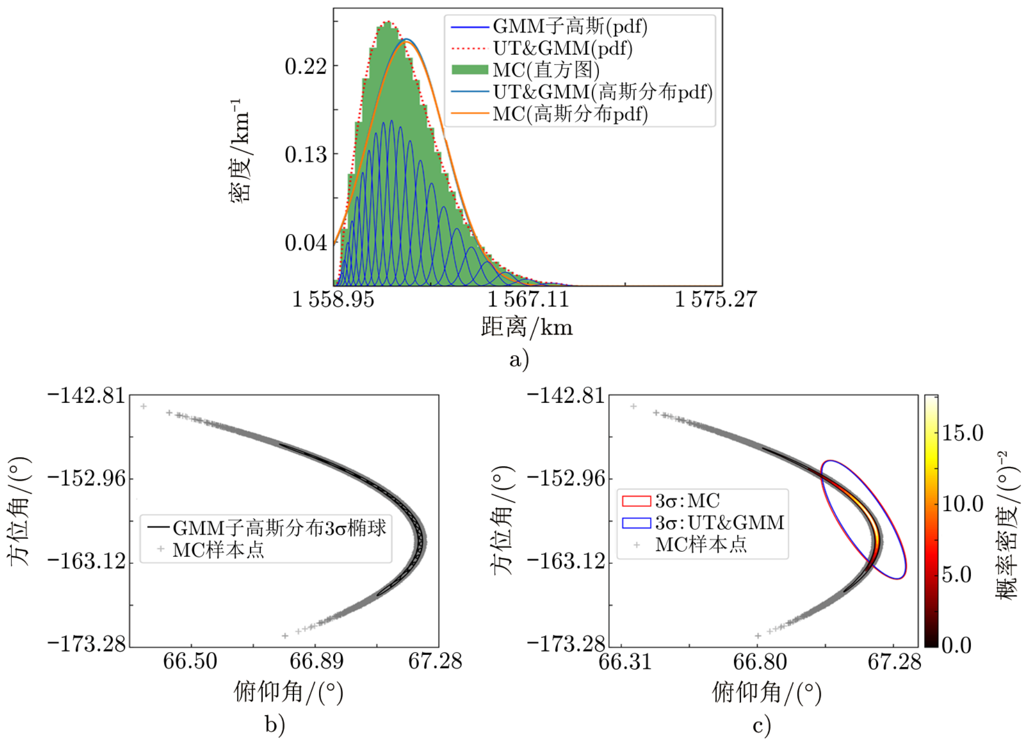


图 8 1 450 km 轨道偏差传播终端时刻 (101 076 s) 结果

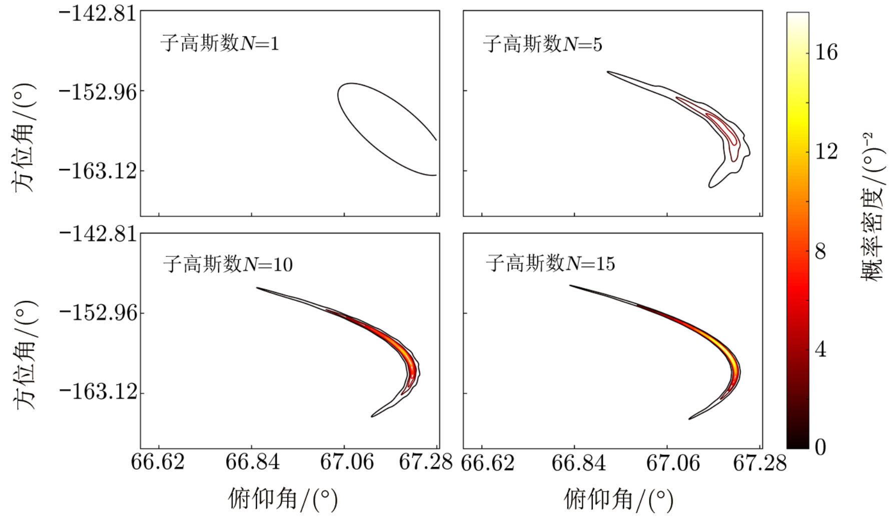


图 9 不同子高斯数下 1 450 km 轨道偏差传播终端分布对比

表 3 和表 4 分别给出了 UT&GMM 方法得到的 1 450 km 轨道终端均值和标准差与 MC 方法所得结果的对比，由表可知，两者非常接近，表明 UT&GMM 方法预报的结果良好。

由算例结果可知，初始高斯分布轨道偏差（椭球状），经过非线性轨道力学的传播后，变成沿轨道弧线弯曲类似香蕉形状的非高斯分布偏差，而 UT&GMM 方法能够很好地表征这种非高斯特征，表明 UT&GMM 方法能很好预报偏差的概率密度函数。

与 MC 方法相比，UT&GMM 方法所需样本点数为 $N \times (2n+1)$。其中，N 为子高斯数，n 为协方差矩阵维数，以 21 个子高斯、6 维计算，仅需 273 个样本点就能得到与 MC 方法 10^6 个样本点接近的结果。UT&GMM 计算耗时 1 min 以内，而 MC 仿真需超过 2 h，计算效率提升上百倍。

5　结论与展望

本文通过结合无迹变换方法与高斯混合模型，给出了空间碎片在站心球坐标系下的终端分布情况，兼顾精度与运行耗时，既能达到与蒙特卡洛结果相近的精度（预报距离误差不超过 20 m，角度误差小于 $2''$），又能节省大量的运算成本（计算效率提高百倍以上）。本文给出的距离方向上的偏差分布可以为探测器距离门设置提供依据，方位角、俯仰角投影上的偏差分布可以为激光指向提供依据。这对于全天时测距观测具有重要意义，尤其是在目标处于地影区或白天测距等无法进行光学引导的场景，本文的偏差传播结果可给出目标在空间中各位置概率的高低，因此可得到目标搜索区域的优先级，为搜索路径的规划提供支撑，有助于激光测距的目标搜索，提升目标捕获的成功率。

参考文献：

[1] 汤儒峰, 翟东升, 张海涛, 等. 空间碎片研究, 2020, 20: 21
[2] 李语强, 李荣旺, 李祝莲, 等. 红外与激光工程, 2015, 44: 3324
[3] 高健, 梁智鹏, 韩兴伟, 等. 光子学报, 2022, 51: 0912002
[4] 金彪, 李语强, 周巍, 等. 天文学进展, 2022, 40: 416
[5] 陶恩哲, 周旭华, 徐可馨, 等. 天文学进展, 2023, 41: 546
[6] Greene B, Gao Y, Moore C, et al. Proceedings of the 13th International Workshop on Laser Ranging Instrumentation. Washington DC: NASA, 2002: 1
[7] Kirchner G, Koidl F, Friederich F, Advances in Space Research, 2013, 51: 21
[8] Yang F M, Zhang Z P, Chen J P et al. Proceedings of the 16th International Workshop on Laser Ranging. Poznan Poland: NASA, 2008: 695
[9] 李语强, 李祝莲, 伏红林, 等. 中国激光, 2011, 38: 0908001
[10] 董雪, 韩兴伟, 宋清丽, 等. 红外与激光工程, 2016, 45: 35
[11] Sang J Z, Smith C, Zhang K F. Advances in Space Research, 2012, 49: 1088
[12] 杜建丽，李彬，陈立娟，等. 红外与激光工程, 2016, 45: 0229004
[13] 梁智鹏，宋清丽，温冠宇，等.空间碎片研究, 2017, 17: 13
[14] Vallado D, Crawford P, Hujsak R, et al. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Keystone: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006: 1

[15] Maybeck P S. Stochastic models, estimation, and control. New York: Academic press, 1982: 101
[16] 杨震. 博士论文, 长沙: 国防科技大学, 2018: 20
[17] Luo Y Z, Yang Z. Progress in Aerospace Sciences, 2017, 89: 23
[18] Julier S J, Uhlmann J K. Proceedings of the IEEE, 2004, 12: 401
[19] Tenne D, Singh T. Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver: IEEE, 2003: 2441
[20] Easley D C, Berry T. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification, 2021, 9: 1094
[21] 李彬. 博士论文, 武汉: 武汉大学, 2017: 31
[22] Vittaldev V, Russell R P. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39: 2163

Orbital Uncertainty Nonlinear Propagation for Space Debris Laser Ranging

ZHANG Lijun[1,2], SHU Peng[1], LI Rongwang[1,3], LI Yuqiang[1,3]

(1. Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences, Kunming 650216, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. Key Laboratory of Space Object and Debris Observation, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210023, China)

Abstract: In laser ranging of space debris, the success rate is often low due to significant orbit prediction errors. To address this, a method that combines the unscented transformation technique with the Gaussian Mixture Model to propagate the orbital uncertainty of space debris is proposed. This approach yields the debris's state moments (generally mean and covariance matrix) or probability density function (PDF) at their terminal time, thereby providing a robust foundation for laser ranging. First, typical orbits in current laser ranging of space debris are selected to establish initial orbit uncertainty. Then, the unscented transformation method is utilized to nonlinearly predict the mean and covariance matrix of this uncertainty. Subsequently, the Gaussian Mixture Model is employed to approximate the probability density function of the uncertainty, and the results are converted into the station coordinate system centered on the station. The outcomes align with those derived from the Monte Carlo method: the absolute error of predicted range remains within 20 m, while the errors in azimuth and elevation angles do not surpass 2 arc seconds. Furthermore, the predicted probability density function curve closely mirrors the Monte Carlo simulation results, and the computational time efficiency is enhanced by over one hundred times. This demonstrates that the method not only offers high-precision uncertainty prediction but also furnishes a reliable foundation for subsequent laser ranging. Additionally, it effectively mitigates the substantial computational demands associated with Monte Carlo simulations.

Key words: laser ranging; uncertainty propagation; orbit prediction; unscented transformation; Gaussian mixture model